第10卷 第1期 岩石矿物学杂志 Vol. 10, No. 1
1991年2月 ACTA PETROLOGICA ET MINERALOGICA Feb. 1991

重折射率指示体——晶体的一种新的光性指示体

徐 洪 武

(南京大学地球科学系*)

主题词：晶体；光性指示体；重折射率指示体

提 要：晶体的重折射率指示体是由作者引入的一种新的光性指示体，它表述了晶体在各个方向上的重折射特征。在本文中，作者通过运算推导得出了重折射率指示体方程，并在此基础上讨论了各晶族晶体之重折射率指示体的性质。

迄今为止，人们用来表述晶体在各个方向上光性特征的指示体已有七种，即：光率体、光线速度面、光波速度面、振动速度面、卵形面、光率面和折射度指示体[1]。这些指示体不仅在物理意义上具有等效性，而且还在几何意义上存在联系性。但由于它们是从不同的角度来反映晶体的光性特征，因此，它们分别适用于研究晶体的各种不同的光学性质。其中应用最为广泛的是光率体。

在本文中，作者引入了一种新的光性指示体——晶体的重折射率指示体（birefringence indicatrix）。与其它的光性指示体不同，这种光性指示体在各个方向上的矢径长度，反映了晶体在其相应方向上的重折射率大小，因此，在研究晶体的重折射现象时，它的应用将具有重要的意义。作者首先从晶体的光率体出发，根据重折射率的定义，推导得出了晶体的重折射率指示体方程，然后在此基础上，讨论了各晶族晶体之重折射率指示体的性质。

一、重折射率指示体方程的推导

众所周知，晶体的光率体是一个二次椭球体❶(图1)。其方程为：

$$\frac{X^2}{Ng^2}+\frac{Y^2}{Nm^2}+\frac{Z^2}{Np^2}=1 \tag{1}$$

（Ng、Nm、Np为晶体的主折射率，且$Ng>Nm>Np$）

如图1—A所示，对于沿某方向$\overrightarrow{PO}$传播的光波而言，它进入晶体后，就分解成振动方向互相垂直、传播速度不同、相应地折射率也不等的两个偏振光。这两个偏振光的振动方向和折射率大小可用过原点O且与$\overrightarrow{PO}$垂直的平面与光率体的交线——椭圆（图1-B)之半长轴和半短轴的方向和长度来表述。半长轴和半短轴的长度之差即为光波沿晶体的PO方向传播时重折射率（简言之即为晶体在$\overrightarrow{PO}$方向上的重折射率）的大小$r(\varphi,\ \theta)$。φ为通过Z轴及点P的半平面与

* 现在南京化工学院硅酸盐工程系工作。

❶ 一轴晶和均质体是二轴晶的特殊情况，在此不另行讨论。

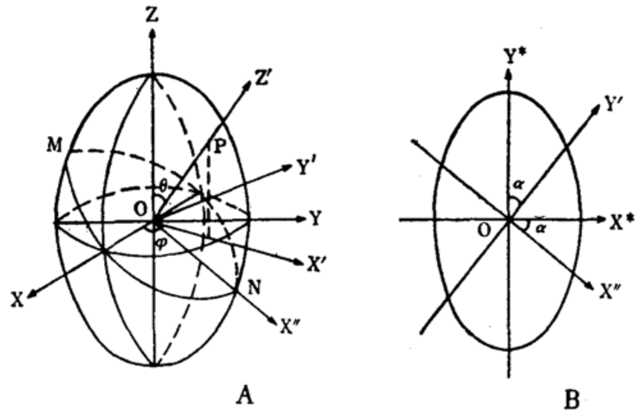

图 1　晶体的光率体

Fig. 1.　Optic indicatrix of crystal

注：图B为图A的MN剖面

XOZ平面所夹的角。θ为$\overrightarrow{OP}$与Z轴正向所夹的角。

为了求得$r(\varphi,\ \theta)$，须先经坐标变换求得过O点且与$\overrightarrow{OP}$垂直的椭圆的方程，然后再将该方程化成标准形式，这样就可得知该椭圆半长轴和半短轴的大小。

先将坐标系OXYZ绕OZ轴旋转φ角，得到坐标系OX′Y′Z′（图1-A），则变换公式为：

$$\begin{cases} X = X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi \\ Y = X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi \end{cases} \tag{2}$$

再将坐标系OX′Y′Z绕OY′轴旋转θ角，得到坐标系OX″Y′Z′(图1-A)，则变换公式为：

$$\begin{cases} X' = X''\cos\theta + Z'\sin\theta \\ Z' = -X''\sin\theta + Z'\cos\theta \end{cases} \tag{3}$$

显然，在新坐标系OX″Y′Z′中，OZ′轴的正向即为$\overrightarrow{OP}$的方向。

将式(3)代入式(2)得：

$$\begin{cases} X = (X''\cos\theta + Z'\sin\theta)\cos\varphi - Y'\sin\varphi \\ Y = (X''\cos\theta + Z'\sin\theta)\sin\varphi + Y'\cos\varphi \\ Z = -X''\sin\theta + Z'\cos\theta \end{cases} \tag{4}$$

式(4)即为新坐标系OX″Y′Z′与旧坐标系OXYZ之间的变换公式。

将式(4)代入式(1)，并令$Z'=0$，经整理即得所求的椭圆方程：

$$AX''^2 + BX''Y' + CY'^2 = 1 \tag{5}$$

式中，$A = \frac{1}{Ng^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi + \frac{1}{Nm^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi + \frac{1}{Np^2}\sin^2\theta$

$$B = \left(-\frac{1}{Ng^2} + \frac{1}{Nm^2}\right)\sin 2\varphi\cos\theta$$

$$C = \frac{1}{Ng^2}\sin^2\varphi + \frac{1}{Nm^2}\cos^2\varphi$$

要求得到该椭圆的半长轴和半短轴的大小，须先把其方程(5)化成标准形式，即将式(5)中的X″Y′项消去。

根据二次曲线方程的化简原则，将坐标系$OX''Y'$转动角α（$\alpha=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{B}{A-C}$），得到坐标系$OX^*Y^*$（图2-B）。其变换公式为：

$$\begin{cases} X''=X^*\cos\alpha-Y^*\sin\alpha \\ Y'=X^*\sin\alpha+Y^*\cos\alpha \end{cases} \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)得：

$$A'X^{*2}+C'Y^{*2}=1 \tag{7}$$

式中，$A'=\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}[(A-C)^2+B^2]^{\frac{1}{2}}$

$C'=\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}[(A-C)^2+B^2]^{\frac{1}{2}}$

这样，就得到了椭圆方程(5)的标准形式。

那么，晶体在$\overrightarrow{OP}$方向上的重折射率$r(\varphi,\ \theta)$为：

$$r(\varphi,\ \theta)=|A'^{-\frac{1}{2}}-C'^{-\frac{1}{2}}| \tag{8}$$

由式(5)、(7)、(8)得：

$$\begin{aligned} r(\varphi,\theta)=\sqrt{2}\times\Bigg|&\Bigg\{\left(\frac{1}{Ng^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{Nm^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{Np^2}\sin^2\theta+\frac{1}{Ng^2}\sin^2\varphi\right.\\ &\left.+\frac{1}{Nm^2}\cos^2\varphi\right)+\Bigg[\left(\frac{1}{Ng^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{Nm^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{Np^2}\sin^2\theta\right.\\ &\left.-\frac{1}{Ng^2}\sin^2\varphi-\frac{1}{Nm^2}\cos^2\varphi\right)^2+\left(\frac{1}{Nm^2}-\frac{1}{Ng^2}\right)^2\sin^2 2\varphi\cos^2\theta\Bigg]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}^{-\frac{1}{2}}\\ &-\Bigg\{\left(\frac{1}{Ng^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{Nm^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{Np^2}\sin^2\theta+\frac{1}{Ng^2}\sin^2\varphi\right.\\ &\left.+\frac{1}{Nm^2}\cos^2\varphi\right)-\Bigg[\left(\frac{1}{Ng^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi+\frac{1}{Nm^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{Np^2}\sin^2\theta\right.\\ &\left.-\frac{1}{Ng^2}\sin^2\varphi-\frac{1}{Nm^2}\cos^2\varphi\right)^2+\left(\frac{1}{Nm^2}-\frac{1}{Ng^2}\right)^2\sin^2 2\varphi\cos^2\theta\Bigg]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}^{-\frac{1}{2}}\Bigg| \end{aligned} \tag{9}$$

因此，由式(9)就可求得晶体在任意方向（φ，θ）上的重折射率值r（φ，θ）。把无穷多个（φ，θ）方向上所对应的重折射率r（φ，θ）的端点连接起来，就构成一空间图形，作者称之为重折射率指示体。式(9)就是所求得的重折射率指示体方程●。

二、重折射率指示体的性质

由重折射率指示体方程(9)得知，晶体的重折射率指示体是一个呈中心对称但非常复杂的高次曲面体。下面分别就高级晶族（均质体）、中级晶族（一轴晶）和低级晶族（二轴晶）之重折射率指示体的性质进行讨论。

1.高级晶族（均质体）的重折射率指示体

高级晶族的光率体为球体，其方程为：

● 式(9)实际上是重折射率指示体方程的球面坐标形式，其直角坐标形式只要将$r=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$、$\varphi=\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$、$\theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$代入即得，但由于在研究晶体的重折射现象时它不如前者直观和方便，因此，一般不予采用。

$$X^2+Y^2+Z^2=N^2 \tag{10}$$

将$Ng=Nm=Np=N$代入式(9)得：

$$r(\varphi,\theta)=0 \tag{11}$$

式(11)说明，高级晶族晶体在所有方向上的重折射率均为零，即不存在重折射现象，相应地其重折射率指示体为一个点。

2. 中级晶族（一轴晶）的重折射率指示体

中级晶族晶体的光率体为旋转椭球体，其方程为：

$$\frac{X^2}{No^2}+\frac{Y^2}{No^2}+\frac{Z^2}{Ne^2}=1 \tag{12}$$

将$Ng=Nm=No$，$Np=Ne$代入式(9)得：

$$r(\varphi,\theta)=\left|\left(\frac{\cos^2\theta}{No^2}+\frac{\sin^2\theta}{Ne^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-No\right| \tag{13}$$

对于一轴正晶（$Ne>No$）：

$$r(\varphi,\theta)=\left(\frac{\cos^2\theta}{No^2}+\frac{\sin^2\theta}{Ne^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-No$$

对于一轴负晶（$Ne<No$）：

$$r(\varphi,\theta)=No-\left(\frac{\cos^2\theta}{No^2}+\frac{\sin^2\theta}{Ne^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

显然，$r(\varphi,\theta)$与φ无关，即中级晶族晶体的重折射率指示体对于$Z(Ne)$轴具有旋转对称性（图2-A）。

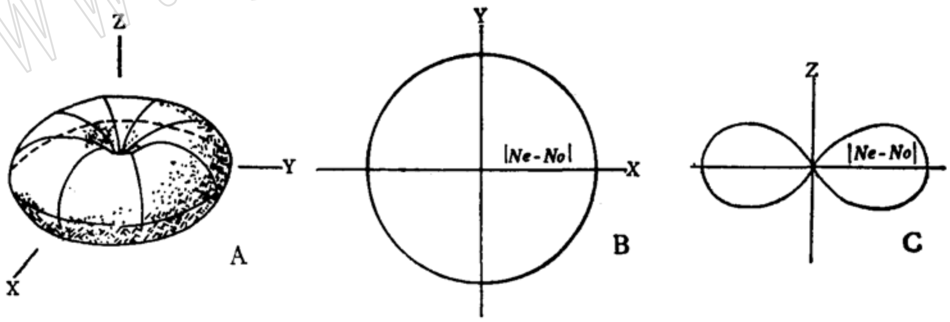

图 2　中级晶族(一轴晶)的重折射率指示体

Fig. 2. Birefringence indicatrix of the intermediate category (uniaxial crystals)

(1)若$\theta=0°$，则$r(\varphi,\theta)=0$，即无重折射现象，显然这就是光轴Ne(Z轴)的方向；

(2)若$\theta=90°$，则$r(\varphi,\theta)=|Ne-No|$，即具有最大的重折射率，这是垂直于光轴$Ne$(Z轴）的方向（图2-B)；

(3)若$0°<\theta<90°$，则$0<r(\varphi,\theta)<|Ne-No|$(图2-C)。

3. 低级晶族（二轴晶）的重折射率指示体

低级晶族晶体的光率体为三轴椭球体，其方程为式(1)。那么，式(9)即为其重折射率指示体方程（$Ng>Nm>Np$）。如前所述，低级晶族晶体的重折射率指示体是一个非常复杂的高次曲面(图3-A)。

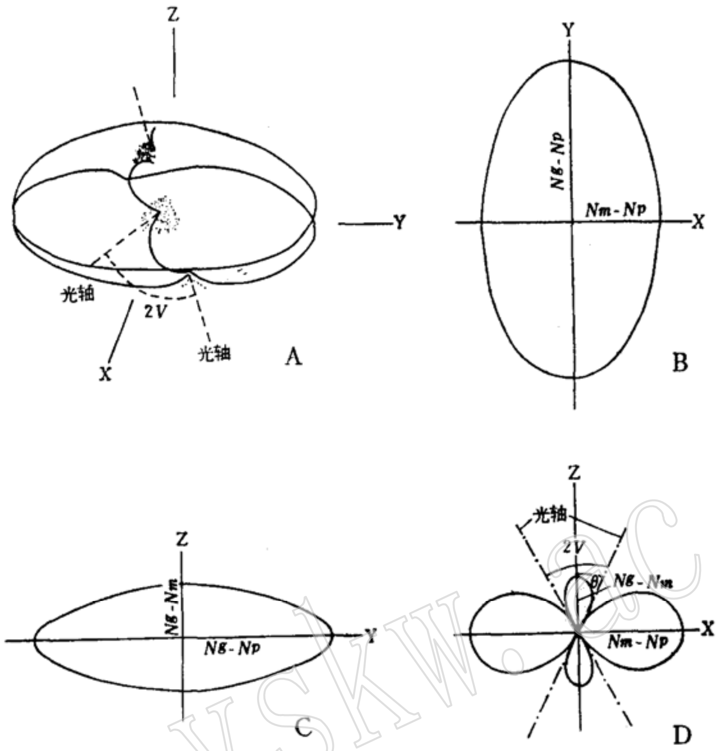

图 3 低级晶族（二轴晶）的重折射率指示体

Fig. 3. Birefringence indicatrix of the lower category (biaxial crlystals)

(1)若$\theta=90°$，则$r(\varphi,\theta)=(\frac{\sin^2\varphi}{Ng^2}+\frac{\cos^2\varphi}{Nm^2})^{-\frac{1}{2}}-Np$(图3-B)。这是重折射率指示体在XY坐标平面上的剖面；

(2)若$\varphi=90°$，则$r(\varphi,\theta)=Ng-\frac{\cos^2\theta}{Nm^2}+\frac{\sin^2\theta}{Np^2})^{-\frac{1}{2}}$（图3-C)。这是重折射率指示体在YZ坐标平面上的剖面；

(3)若$\varphi=0°$，则

$$r(\varphi,\theta)=\left|(\frac{\cos^2\theta}{Ng^2}+\frac{\sin^2\theta}{Np^2})^{-\frac{1}{2}}-Nm\right| \tag{14}$$

如图3-D所示，这是重折射率指示体在XZ坐标平面上的剖面，即光轴面的位置。

令式(14)中的$r(\varphi,\theta)=0$，则得到光轴方向与Np轴(Z轴)之夹角θ^*的正切值：

$$\mathrm{tg}\theta^*=\frac{Np}{Ng}\sqrt{\frac{Ng^2-Nm^2}{Nm^2-Np^2}} \tag{15}$$

该式与二轴负晶光率体光轴半角V的正切值tg$V$的公式[2]完全一致。

因此，θ^*与光轴半角V的关系是：

对二轴负晶，$\theta^*=V$

对二轴正晶，$\theta^*=90°-V$

总之，作为晶体的一种新的光性指示体，重折射率指示体更为直观而有效地反映了晶体在各个方向上的重折射特征。有关它的应用，还有待于今后的进一步研究。

在本文的研究工作中，曾得到季寿元教授的热情指教和物理系盛冬宁博士的大力协助，作者在此深表谢意。

参 考 文 献

〔1〕 叶大年，1988，结构光性矿物学．地质出版社，第110页．

〔2〕 王德滋，1975，光性矿物学．上海人民出版社，第18页．

Birefringence Indicatrix——A New Optical Indicatrix of Crystal

Xu Hongwu

(Department of Earth Sciences, Nanjing University)

Key words: Crystal; optical indicatrix; birefringence indicatrix

Abstract

The birefringence indicatrix of crystal deduced by the author is a new kind of optical indicatrix indicating the birefringence of a crystal. In this paper, the equation of the birefringence indicatrix is given and, on the basis of this equation, the properties of the birefringence indicatrixs of all crystals with different optical properties are discussed.