

## 转动物台椭圆偏光运动轨迹分析

张立冬

(西安地质学院)

**主题词:** 椭圆偏光; 运动轨迹; 公式与图解

**提 要:** 本文研究了转动物台椭圆偏光的运动规律, 并用公式和图解表示椭圆偏光运动轨迹, 导出的椭圆偏光方程式集中反映了各公式之间的关系。为解决椭圆偏光长轴运动轨迹, 推导出计算椭圆长轴 ( $a$ ) 和视旋转角 ( $A_r$ ) 两个新公式, 使最大视旋转角所对应的物台转角的研究有新的进展。本文重点讨论不透明矿物反射光的椭圆偏光的性质, 但对透明矿物透射光的椭圆偏光也有一定意义。

探讨转动物台时椭圆偏光的变化规律, 分析椭圆偏光的运动轨迹, 可以解释不透明矿物非均质性的各种现象, 是一项有意义的工作。本文从椭圆偏光的一般性质入手, 探讨转动物台椭圆偏光的运动规律, 求证出椭圆偏光方程及其它新公式, 研究了转动物台时椭圆长轴的运动轨迹及最大视旋转角所对应的物台转角。

### 一、旋转物台椭圆偏光外切矩形的变化及特殊情况下椭圆偏光运动轨迹

直线偏光垂直照射在非均质不透明矿物的光片上，两主反射率 ( $R_1$ 、 $R_2$ ) 的振幅 ( $E_1$ 、 $E_2$ ) 将随物台转角 ( $\phi$ ) 的改变而变化。在任意转角时， $R_1$  方向的振幅为  $E_{1\phi}$ ， $R_2$  方向的振幅为  $E_{2\phi}$  ( $R_1 > R_2$ )，并分别为：

$$E_{1\phi} = E_1 \cos \phi \quad (1-1)$$

$$E_{2\phi} = E_2 \sin \phi \quad (1-2)$$

若两互相垂直的振动存在相差，则合成椭圆偏光。椭圆偏光的外切矩形的边长为  $2E_1 \cos \phi$  和  $2E_2 \sin \phi$ 。转动物台时，外切矩形随物台转角  $\phi$  而变化，其方位、边长、对角线长度及椭圆偏光长轴、椭圆度等也随之改变。

图 1 绘出了转动物台时椭圆偏光的外切矩形随物台转角  $\phi$  不同而改变的图解。图中矩形为  $\phi = 22.5^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $67.5^\circ$  时三个外切矩形。据式 (1-1) 和 (1-2) 按坐标作图， $E_{1\phi}$  和  $E_{2\phi}$  端点运动轨迹为以  $E_1$  和  $E_2$  为直径的两个圆。

在同一个外切矩形中的椭圆偏光，随分振幅之间的相差不同而不同，其中有三种情况较为特殊，并可求得振幅端点或椭圆长轴端点运动轨迹。这三种情况如下：

1. 当相差为零时 ( $\delta = 0$ )，合成的直线偏光振幅端点为外切矩形的角顶，其参数方程为 (以物台转角  $\phi$  为参数)：

$$\begin{cases} x = E_1 \cos^2 \phi + E_2 \sin^2 \phi & (1-3) \\ y = E_1 \cos \phi \sin \phi - E_2 \sin \phi \cos \phi & (1-4) \end{cases}$$

由 (1-3) 式得：

$$\begin{aligned} x &= E_2 + (E_1 - E_2) \cos^2 \phi \\ \cos^2 \phi &= \frac{x - E_2}{E_1 - E_2} \end{aligned} \quad (1-5)$$

由 (1-4) 式得：

$$\begin{aligned} y^2 &= (E_1 - E_2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ &= (E_1 - E_2)^2 \cos^2 \phi (1 - \cos^2 \phi) \end{aligned} \quad (1-6)$$

将 (1-5) 式代入 (1-6) 式，消去  $\cos^2 \phi$  得：

$$y^2 = (E_1 - E_2)^2 \left( \frac{x - E_2}{E_1 - E_2} \right) - (E_1 - E_2)^2 \left( \frac{x - E_2}{E_1 - E_2} \right)^2$$

化简后得出：

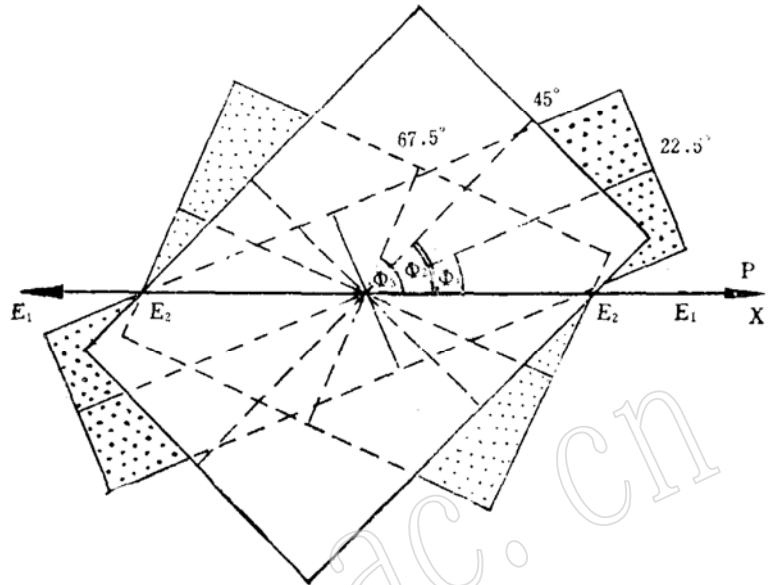


图 1 转动物台椭圆偏光外切矩形变化情况

Fig. 1 Variation in outer rectangle of elliptical polarized light by turning stage

$$\begin{aligned}
 x^2 - E_1x + E_2x + y^2 + E_1E_2 &= 0 \\
 x^2 - (E_1 + E_2)x + \left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right)^2 - E_1E_2 \\
 \left(x - \frac{E_1 + E_2}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 \tag{1-7}
 \end{aligned}$$

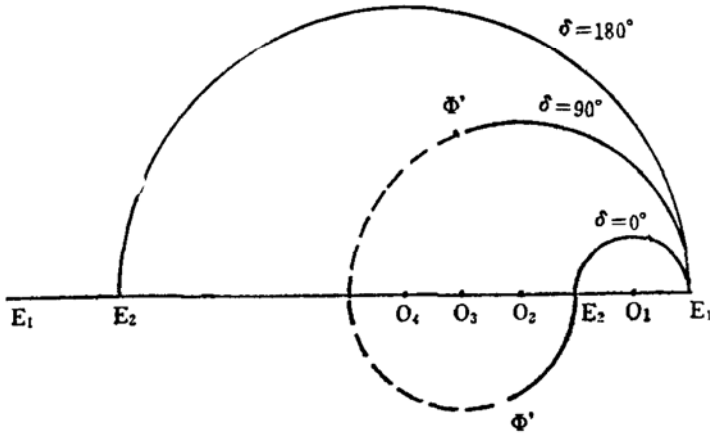


图 2 转动物台当相差  $\delta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  时振幅 (或椭圆长轴) 运动轨迹  
 Fig. 2 Motion track of amplitudes (or major axis of ellipse) in the case of phase difference being  $0^\circ, 90^\circ$  and  $180^\circ$  by turning stage

(1-7) 式为圆方程, 圆半径为  $(E_1 - E_2)/2$ , 圆心坐标为  $(E_1 - E_2)/2, 0$ 。由此证明, 当相差为零时, 转动物台矿物反射率振幅 ( $E_s$ ) 即外切矩形对角线端点沿圆做运动 (图2)。

2. 当相差为  $90^\circ$  时 ( $\delta = 90^\circ$ ) 椭圆偏光长轴  $a$  及短轴  $b$  分别平行于外切矩形的长短边, 且为外切矩形的中心线。外切矩形中心线长度分别为  $E_1$  和  $E_2$ 。

椭圆长轴 ( $a$ ) 端点运动轨迹的参数方程为:

$$\begin{cases} x = E_1 \cos^2 \phi & (1-8) \\ y = E_1 \sin \phi \cos \phi & (1-9) \end{cases}$$

由 (1-8) 式得:

$$\begin{aligned}
 \cos \phi &= \sqrt{\frac{x}{E_1}} \\
 \sin \phi &= \sqrt{\frac{E_1 - x}{E_1}}
 \end{aligned}$$

将上式代入 (1-9) 式得:

$$\begin{aligned}
 y &= E_1 \sqrt{\frac{x}{E_1}} \sqrt{\frac{E_1 - x}{E_1}} \\
 x^2 - E_1x + y^2 &= 0 \\
 \left(x - \frac{E_1}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{E_1}{2}\right)^2 \tag{1-10}
 \end{aligned}$$

上式证明相差等于  $90^\circ$  时, 转动物台椭圆长轴运动轨迹为圆, 圆半径为  $\frac{E_1}{2}$ , 圆心坐标为

$\left(\frac{E_1}{2}, 0\right)$  (图2)。

当转动物台时, 椭圆偏光外切矩形的长边和短边有互相变换的现象。这一点当  $\delta = 90^\circ$  时看得更为清楚。当物台转角  $\phi$  改变时, 椭圆长轴  $a = E_1 \cos \phi$ , 短轴  $b = E_2 \sin \phi$ 。当物台转角  $\phi$  在某一位置时, 可得  $E_1 \cos \phi = E_2 \sin \phi$ , 此时  $\text{tg} \phi = \frac{E_1}{E_2}$ , 且  $a = b$ , 由于相差  $\delta = 90^\circ$ , 则合成圆偏

光。继续转动物台可使 $E_1 \cos \phi < E_2 \sin \phi$ , 此时外切矩形长边和短边互换。

3. 当相差为 $180^\circ$ 时, 合成直线偏光, 其振动方向为外切矩形另一对角线。振幅端点运动轨迹参数方程为:

$$\begin{cases} x = E_1 \cos^2 \phi - E_2 \sin^2 \phi & (1-11) \\ y = E_1 \sin \phi \cos \phi + E_2 \sin \phi \cos \phi & (1-12) \end{cases}$$

据上述推导方法可求得方程为:

$$\left(x - \frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right)^2 \quad (1-13)$$

此式仍为圆方程, 圆半径为 $\frac{E_1 + E_2}{2}$ , 圆心坐标为 $\left(\frac{E_1 - E_2}{2}, 0\right)$ 。

上述三种特殊情况( $\delta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ), 当转动物台时振幅端点(或椭圆长轴)运动轨迹如图2所示。它确定了不同相差椭圆偏光运动轨迹的范围和区域。

## 二、椭圆偏光方程及与其它公式的关系

椭圆偏光互相垂直的二分振幅为 $E_1 \cos \phi$ 和 $E_2 \sin \phi$ , 二分振幅之间相差为 $\delta$ 。当物台转角 $\phi$ 为某一角度时, 合成椭圆偏光的参数方程为:

$$\begin{cases} x_1 = E_1 \cos \phi \sin \omega t & (2-1) \\ y_1 = E_2 \sin \phi \sin(\omega t + \delta) & (2-2) \end{cases}$$

式中 $\omega$ 为角速度,  $t$ 为时间。此时 $x_1, y_1$ 直角坐标系不平行入射光振动方向(pp), 其夹角为物台转角 $\phi$ 。

在 $x_1, y_1$ 坐标系中的椭圆方程为:

$$\frac{x^2}{E_1^2 \cos^2 \phi} - \frac{2x_1 y_1 \cos \delta}{E_1 \cos \phi E_2 \sin \phi} + \frac{y^2}{E_2^2 \sin^2 \phi} = \sin^2 \delta \quad (2-3)$$

或写成:

$$\begin{aligned} E_2^2 \sin^2 \phi x_1^2 - 2E_1 \cos \phi E_2 \sin \phi \cos \delta x_1 y_1 + E_1^2 \cos^2 \phi y^2 \\ = E_1^2 E_2^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sin^2 \delta \end{aligned} \quad (2-4)$$

$x_1, y_1$ 坐标方位随物台转角 $\phi$ 而变化, 当转动物台时,  $x_1, y_1$ 坐标系也随之旋转。若要取新坐标系(xy)并使x轴平行入射光振动方向(pp), 必须将 $x_1, y_1$ 坐标系换算成新坐标, 即坐标轴旋转一个角度并等于物台转角 $\phi$ 。据解析几何可知转轴公式为:

$$x_1 = x \cos \phi - y \sin \phi \quad (2-5)$$

$$y_1 = x \sin \phi + y \cos \phi \quad (2-6)$$

将(2-5)、(2-6)式代入(2-4)式中, 并展开化简得:

$$\begin{aligned} \sin^2 \phi \cos^2 \phi (E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \delta) x^2 - 2 \sin \phi \cos \phi (E_2^2 \sin^2 \phi \\ - E_1 E_2 \sin^2 \phi \cos \delta + E_1 E_2 \cos^2 \phi \cos \delta - E_1^2 \cos^2 \phi) xy \\ + (E_1^2 \cos^4 \phi - 2E_1 E_2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos \delta + E_2^2 \sin^4 \phi) y^2 \\ = E_1^2 E_2^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sin^2 \delta \end{aligned} \quad (2-7)$$

令:  $A = \sin^2 \phi \cos^2 \phi (E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \delta)$

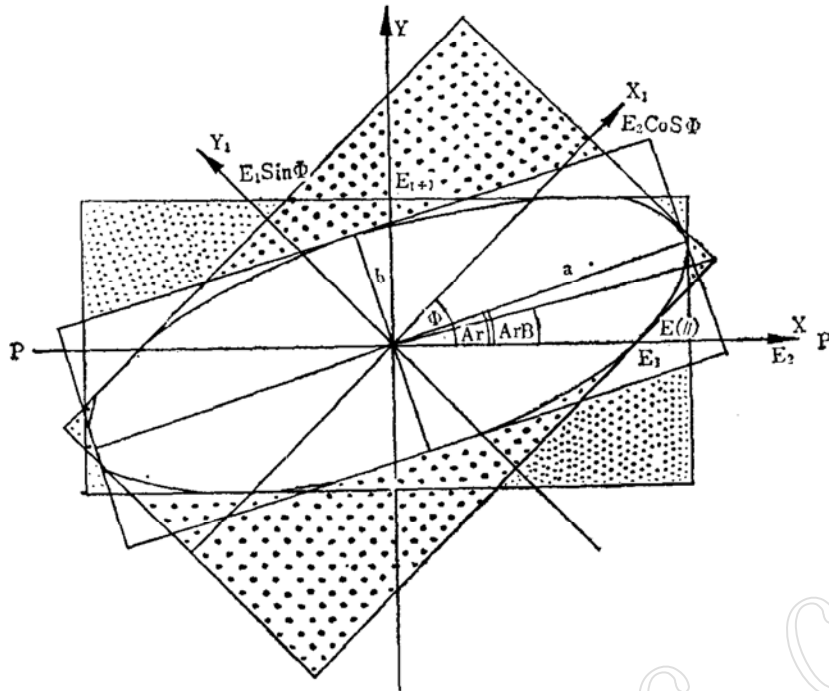


图 3 非均质不透明矿物光片反射光的椭圆偏光

Fig. 3 Elliptical polarized light reflected from polished surface of the anisotropic opaque mineral

(pp—入射光振动方向,  $\phi$ —物台转角,  $Ar$ —视旋转角,  $Ar\beta$ —非均质旋转角,  $OE_+$ —正交偏光反射率振幅,  $OE_//$ —平行偏光反射率振幅)

(pp—direction of incident vibration,  $\phi$ —angle of stage turning,  $Ar$ —angle of apparent rotation,  $Ar\beta$ —angle of anisotropic rotation,  $OE_+$ —amplitude of reflectivity under crossed polars,  $OE_//$ —amplitude of reflectivity under parallel polars)

$$B = \sin\phi\cos\phi(E_2^2\sin^2\phi + E_1E_2\cos\delta\cos 2\phi - E_1^2\cos^2\phi)$$

$$C = E_1^2\cos^4\phi + E_2^2\sin^4\phi + 2E_1E_2\sin^2\phi\cos^2\phi\cos\delta$$

$$D = E_1^2E_2^2\sin^2\phi\cos^2\phi$$

则 (2—7) 式为:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D\sin^2\delta \quad (2-8)$$

(2—7) 式为椭圆偏光方程, 其坐标轴  $x$  平行入射光振动方向  $pp$ 。椭圆偏光方程每项系数比较复杂但很重要。根据这些系数可分析与椭圆偏光有关的各公式之间关系。

由椭圆偏光方程及图 3 可以得到, 平行  $x$ 、 $y$  坐标系的外切矩形的边长之半分别为  $\sqrt{A}$ 、 $\sqrt{C}$ , 并且分别等于椭圆偏光透过上偏光的振幅分量和通过平行偏光的振幅分量, 因此, 正交偏光反射率  $R_+ = A$ , 平行偏光反射率  $R_// = C$ , 即:

$$\begin{aligned} R_+ = A &= \sin^2\phi\cos^2\phi(E_1^2E_2^2 - 2E_1E_2\cos\delta) \\ &= \frac{1}{4}\sin^2 2\phi (R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}\cos\delta) \end{aligned} \quad (2-9)^{[1]}$$

$$\begin{aligned} R_// = C &= E_1^2\cos^4\phi + E_2^2\sin^4\phi + 2E_1E_2\sin^2\phi\cos^2\phi\cos\delta \\ &= R_1\cos^4\phi + R_2\sin^4\phi + 2\sqrt{R_1R_2}\cos^2\phi\sin^2\phi\cos\delta \end{aligned} \quad (2-10)^{[1]}$$

同一个椭圆的不同外切矩形其对角线长度不变<sup>[2]</sup>。在图 3 中, 椭圆偏光有三个外切矩形 (1) 平行  $xy$  坐标的外切矩形, 其外切矩形边长为  $2\sqrt{A}$ 、 $2\sqrt{C}$ ; (2) 平行矿物主反射率

方向(即 $x_1y_1$ 坐标)的外切矩形;(3)平行椭圆偏光长短轴(a、b)的外切矩形。这三个外切矩形的对角线长度应该是相等的。因此,存在如下关系式:

$$A + C = a^2 + b^2 = E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi = R_1 \cos^2 \phi + R_2 \sin^2 \phi \quad (2-11)$$

此式中 $E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi$ 为 $x_1y_1$ 坐标系中外切矩形对角线之半的平方,并等于矿物反射率,即

$$R_\phi = R_1 \cos^2 \phi + R_2 \sin^2 \phi \quad (2-12)^{[1]}$$

椭圆偏光长轴a与入射光振动方向(pp)的夹角为视旋转角 $Ar$ 。欲求得视旋转角 $Ar$ ,据解析几何知道,可通过旋转坐标轴实现。已知在xy坐标系的椭圆偏光方程为 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D$ ,其中 $2B \neq 0$ ,把坐标轴转过适当的角度,即旋转后的坐标轴平行椭圆长轴,使新方程 $x_2y_2$ 的系数为0,成为标准椭圆方程,其转角即为视旋转角 $Ar$ 。其公式为:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2Ar &= \frac{-2B}{A-C} \\ &= \frac{-2 \sin \phi \cos \phi (E_2^2 \sin^2 \phi + E_1 E_2 \cos \delta \cos 2\phi - E_1^2 \cos \phi)}{\sin^2 \phi \cos^2 \phi (E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \delta) - (E_1^2 \cos^4 \phi + E_2^2 \sin^4 \phi + 2E_1 E_2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \cos \delta)} \\ &= \frac{\sin 2\phi (E_1^2 \cos^2 \phi - E_2^2 \sin^2 \phi - E_1 E_2 \cos 2\phi \cos \delta)}{(E_1^2 \cos^2 \phi - E_2^2 \sin^2 \phi) \cos 2\phi + E_1 E_2 \sin^2 2\phi \cos \delta} \end{aligned} \quad (2-13)$$

在测定矿物非均性数据时,一般以物台转角 $\phi = 45^\circ$ 为标准。 $45^\circ$ 位各公式为:

$$R_+ = \frac{1}{4} (R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \delta) \quad (2-14)$$

$$R_- = \frac{1}{4} (R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \delta) \quad (2-15)$$

$$\operatorname{tg} 2Ar = \frac{R_1 - R_2}{2\sqrt{R_1 R_2} \cos \delta} \quad (2-16)$$

根据椭圆偏光外切矩形公式<sup>[1]</sup>及物台转角 $\phi$ 之间关系( $Ar = 45^\circ - \sigma$ ,  $\phi' = 45^\circ - Ar\beta$ ),可得出下列各式:

$$\operatorname{tg} 2Ar = \operatorname{tg} 2Ar\beta / \cos \delta \quad (2-17)$$

$$\sin 2Ar\beta = \cos 2\theta \sin 2Ar \quad (2-18)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \cos 2Ar \operatorname{tg} \delta \quad (2-19)$$

$$\sin 2\theta = \cos 2Ar\beta \sin \delta \quad (2-20)$$

$\sigma$ 为椭圆长轴与外切矩形长边夹角; $\phi'$ 为外切矩形对角线与长边夹角; $\theta$ 为椭圆度; $Ar\beta$ 为非均质旋转角; $Ar$ 为视旋转角。目前已测得矿物的 $2\theta$ 及 $Ar$ 值,据 $\operatorname{tg} 2\theta = \cos 2Ar \operatorname{tg} \delta$ 式可求得相差 $\delta$ 。

椭圆偏光方程(2-7)式优点在于它与椭圆偏光图解(图3)完全吻合。正交反射率振幅 $E_x$ 为平行x轴的椭圆切线,平行偏光反射率振幅 $E_y$ 即为平行y轴的椭圆切线。椭圆偏光方程集中反映了矿物非均质性各有关公式之间的相互关系。

### 三、转动物台椭圆长轴运动轨迹及最大视旋转角所对应的物台转角

据椭圆与外切矩形关系式<sup>(2)</sup>可得:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi & (3-1) \\ ab = E_1 E_2 \sin \phi \cos \phi \sin \delta & (3-2) \end{cases}$$

椭圆偏光外切矩形边长为  $2E_1 \cos \phi$  和  $2E_2 \sin \phi$ , 其对角线长度一半为  $(E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi)$  的开方。式中  $\delta$  为  $E_1$ 、 $E_2$  之间相差,  $a$ 、 $b$  为椭圆长短轴。

由 (3-1) 与 (3-2) 式联立求得椭圆长轴  $a$ 。

$$a^2 + \left( \frac{E_1 E_2 \sin \phi \cos \phi}{a} \right)^2 = E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi$$

$$a^4 - (E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi) a^2 + E_1^2 E_2^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sin^2 \delta = 0 \quad (3-3)$$

求得椭圆偏光长轴  $a$  和短轴  $b$  为:

$$a^2 = \frac{(E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi + \sqrt{(E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi)^2 - 4E_1^2 E_2^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sin^2 \delta})}{2} \quad (3-4)$$

$$b^2 = \frac{(E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi - \sqrt{(E_1^2 \cos^2 \phi + E_2^2 \sin^2 \phi)^2 - 4E_1^2 E_2^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \sin^2 \delta})}{2} \quad (3-5)$$

表 1 转动物台不同相差的视旋转角 ( $Ar$ ) 和椭圆长轴 ( $a$ ) 计算值  
Table 1 Angle of apparent rotation ( $Ar$ ) and major axis of ellipse ( $a$ ) calculated at varied phase differences by turning stage

$\phi$	$\delta = 0^\circ$		$\delta = 15^\circ$		$\delta = 30^\circ$		$\delta = 45^\circ$		$\delta = 60^\circ$	
	$Ar$	$a$	$Ar$	$a$	$Ar$	$a$	$Ar$	$a$	$Ar$	$a$
$0^\circ$	0.0000	0.6000	0.0000	0.6000	0.0000	0.6000	0.0000	0.6000	0.0000	0.6000
$5^\circ$	1.6619	0.5987	1.7747	0.5987	2.1059	0.5985	2.6343	0.5982	3.3253	0.5980
$10^\circ$	3.2956	0.5950	3.5162	0.5947	4.1674	0.5940	5.2158	0.5929	6.6013	0.5920
$15^\circ$	4.8719	0.5887	5.1903	0.5881	6.1381	0.5865	7.6874	0.5842	9.7727	0.5819
$20^\circ$	6.3609	0.5802	6.7614	0.5792	7.9680	0.5763	9.9835	0.5723	12.7712	0.5681
$25^\circ$	7.7310	0.5695	8.1919	0.5679	9.6015	0.5636	12.0246	0.5574	15.5051	0.5508
$30^\circ$	8.9482	0.5568	9.4414	0.5547	10.9765	0.5487	13.7108	0.5399	17.8423	0.5303
$35^\circ$	9.9766	0.5424	10.4669	0.5397	12.0239	0.5320	14.9162	0.5203	19.5842	0.5071
$40^\circ$	10.7773	0.5267	11.2237	0.5234	12.6706	0.5139	15.4870	0.4994	20.4241	0.4819
$45^\circ$	11.3099	0.5099	11.6668	0.5062	12.8467	0.4953	15.2545	0.4780	19.9028	0.4562
$50^\circ$	11.5328	0.4926	11.7549	0.4886	12.5007	0.4767	14.0850	0.4575	17.4491	0.4318
$55^\circ$	11.4057	0.4752	11.4552	0.4711	11.6227	0.4590	11.9863	0.4391	12.8046	0.4118
$60^\circ$	10.8934	0.4583	10.7506	0.4544	10.2688	0.4430	9.2315	0.4243	6.9490	0.3988
$65^\circ$	9.9713	0.4424	9.6471	0.4390	8.5702	0.4293	6.3455	0.4135	1.9314	0.3934
$70^\circ$	8.6326	0.4283	8.1776	0.4257	6.7068	0.4182	3.8626	0.4067		
$75^\circ$	6.8964	0.4164	6.4007	0.4147	4.8511	0.4099	2.0671	0.4029		
$80^\circ$	4.8149	0.4075	4.3919	0.4066	3.1117	0.4043	0.9545	0.4010		
$85^\circ$	2.4764	0.4019	2.2325	0.4017	1.5114	0.4011	0.3470	0.4002		
$90^\circ$	0.0000	0.4000	0.0000	0.4000	0.0000	0.4000	0.0000	0.4000		

注: 电算工作得到黄敬良同志帮助。

已知椭圆偏光长轴 (a) 及其方位角 (即视旋转角 $A_r$ )，可求得椭圆长轴转动物台时的运动轨迹。由于计算椭圆偏光长轴公式及视旋转角公式都较复杂，而且变量 ( $E_1$ 、 $E_2$ 、 $\phi$ 、 $\delta$ 、 $a$ 、 $A_r$ ) 较多，很难用数学公式表达转动物台时椭圆长轴运动轨迹。但可借助电子计算机计算不同相差不同振幅的椭圆长轴 a 及视旋转角 $A_r$  (见表1)，然后求出x、y坐标值，用描点作图法绘出椭圆长轴的运动轨迹，其轨迹反映出转动物台时椭圆长轴的变化规律和视旋转角的变化规律。

图4根据计算结果绘出了 $E_1=0.6$ 、 $E_2=0.4$ 、 $\sqrt{R_1}/\sqrt{R_2}=0.66$ 的不同相差 ( $\delta=0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ ) 四条椭圆长轴端点运动轨迹曲线。当相差  $\delta$  为零时椭圆偏光长轴 a 沿圆做运动。当相差  $\delta$  不为零时，其椭圆长轴为一不规则曲线。

在计算和作图中发现，当存在相差时，对应于最大视旋转角 $\bar{A}_r$  的物台转角 $\bar{\phi}$  不再符合公式 $\bar{\phi} = 45^\circ + \frac{1}{2}A_r\beta$ 。利用公式 (2-13) 计算不同物台转角所对应的 $A_r$ 值，以横坐标为物台转角 $\phi$ 值，以纵坐标为所对应的视旋转角 $A_r$ ，做出曲线图 (图5)。同时，计算了不同相差 ( $\delta=0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ ) 的 $A_r$ 与物台转角 $\phi$ 的相关值。通过这样计算 (表1) 及作图发现，最大视旋转角 $\bar{A}_r$ 所对应的物台转角虽靠近 $45^\circ$ ，但随相差的增大而逐渐减小。当 $\delta=0$ 时，物台转角 $\bar{\phi}=51.6^\circ$ ；当 $\delta=15^\circ$ 时， $\bar{\phi}=47^\circ$ ；当 $\delta=30^\circ$ 时， $\bar{\phi}=44^\circ$ ；当 $\delta=45^\circ$ 时， $\bar{\phi}=42^\circ$ ；当 $\delta=60^\circ$ 时， $\bar{\phi}=39^\circ$ 。由此可知，测出最大视旋转角 $A_r$ 所对应的物台转角可以提供相差的信息。

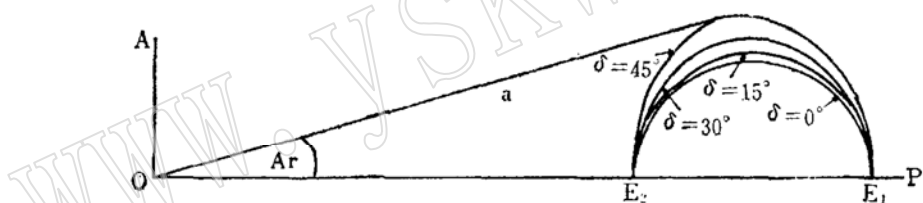


图 4 转动物台当相差 $\delta=0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 时椭圆长轴运动轨迹  
 Fig. 4 Motion track of major axis of ellipse in the case of phase difference being  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  and  $45^\circ$  by turning stage

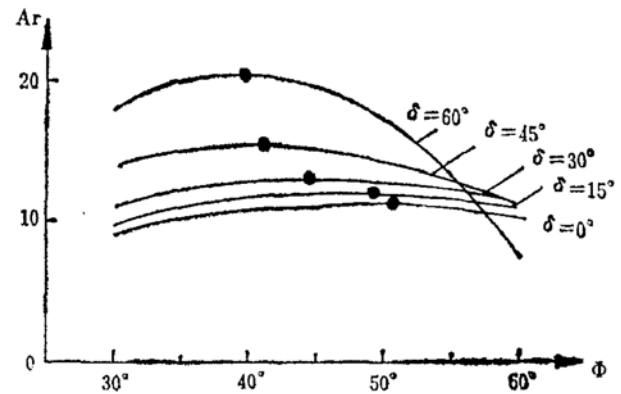


图 5 不同相差的最大视旋转角所对应的物台转角  
 Fig. 5 The largest apparent angle of rotation corresponding to rotation angle of the stage at varied phase differences

综上所述，本文主要探讨了转动物台时椭圆偏光的运动规律，分析了椭圆偏光外切矩形随物台转角 $\phi$ 变化而变化的规律，导出当 $\delta=0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$ 时椭圆长轴运动轨迹方程式，推



导出椭圆偏光方程并分析了与其它公式之间的关系, 计算和作图绘出 $0-45^\circ$ 椭圆长轴运动轨迹, 研究了最大视旋转角所对应的物台转角。本文虽重点讨论不透明矿物反射光的椭圆偏光的性质, 但对透明矿物透射光的椭圆偏光亦有一定价值。

本文承蒙王曙先生审阅并提出宝贵意见, 对此深表感谢。

### 参 考 文 献

- 〔1〕 王曙, 1976, 不透明矿物晶体光学。地质出版社, 第10页、第213页。  
 〔2〕 Wahlstrom, E. E., 1979. Optical crystallography 5th ed John Wiley and Sons. New York. pp.430-468.  
 〔3〕 王曙, 1979, 平行反射率理论及实用。地质科学, 第1期。

## Analysis of Motion Track of the Elliptical Polarized Light by Turning Stage

Zhang Lidong

(Xian Geological College)

**Key words:** elliptical polarized light, motion track, formula and diagram

### Abstract

Regularity of elliptical polarized motion by turning the stage of an ore microscope is investigated, and variation in outer rectangle of the elliptical polarized light is analysed.

Formulae for motion track of major axis of the ellipse are obtained in the case of phase-difference being  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  and  $180^\circ$  respectively. They are

$$\left(x - \frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{E_1 - E_2}{2}\right)^2 \quad \delta = 0^\circ$$

$$\left(x - \frac{E_1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{E_1}{2}\right)^2 \quad \delta = 90^\circ$$

$$\left(x - \frac{E_1 + E_2}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right)^2 \quad \delta = 180^\circ.$$

Equation of elliptical polarized light is

$$\begin{aligned} \sin^2\phi \cos^2\phi (E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\delta) x^2 - 2\sin\phi \cos\phi (E_2^2 \sin^2\phi - E_1E_2 \sin^2\phi \cos\delta \\ + E_1E_2 \cos^2\phi \cos\delta - E_1^2 \cos^2\phi) xy + (E_1^2 \cos^4\phi \\ - 2E_1E_2 \sin^2\phi \cos^2\phi \cos\delta + E_2^2 \sin^4\phi) y^2 = E_1^2 E_2^2 \sin^2\phi \cos^2\phi \sin^2\delta \end{aligned}$$

Equation of apparent rotation angle is

$$\operatorname{tg} 2A_r = \frac{\sin 2\phi (E_1^2 \cos^2\phi - E_2^2 \sin^2\phi - E_1E_2 \cos 2\phi \cos\delta)}{(E_1^2 \cos^2\phi - E_2^2 \sin^2\phi) \cos 2\phi + E_1E_2 \sin^2 2\phi \cos\delta}$$

Motion track of the major axis of an ellipse is drawn in the range of phase difference from  $0^\circ$  to  $45^\circ$ , and rotation angle of the stage corresponding to the largest apparent angle of rotation ( $A_r$ ) is analysed.

[www.yskw.ac.cn](http://www.yskw.ac.cn)